

	제목	미적분의 쓸모	분류	수학 일반
	저자	한화택 저	원제	
	출판사	더 퀘스트	발행일자	2022년 05월 21일

책 소개

새로운 배송시대 도래를 견인하는 드론, 민간인 우주여행으로 또 한 번의 도약을 시도하는 우주공학, 끊임없이 가상의 세계를 만들어내는 컴퓨터그래픽 등 세상에서 일어나고 있는 변화들을 더욱 풍부하게 미적분으로 바라보고 풀어냈다. 또한 초판에서 이해하기 어려웠던 몇몇 그림에 대해 보충 설명을 했다. 공학을 전공하지 않은 사람들도 면적계 등을 이해할 수 있기를 바란다.

미적분이 어렵다는 사실은 변하지 않았다. 하지만 이 책을 통해 많은 수포자가 미적분을 비롯한 수학과 친해졌다. 사람들이 생각하는 것과 달리 미적분의 개념만큼은 보통 사람들도 충분히 이해할 수 있다. 미적분방정식을 풀거나 인공지능 프로그램을 만들지 못하더라도 미적분을 활용할 수 있다. 컴퓨터 전공자가 아니라도 컴퓨터를 사용하고, 스마트폰의 구조를 몰라도 스마트폰을 능숙하게 다루는 것과 같은 이치다. 당신도 미적분이 어떻게 활용되는지 풍부하게 풀어낸 이 책을 통해 수학에 대한 두려움을 덜어내길 바란다.

저자 소개

평생 미적분을 다뤘은 기계공학자. 서울대학교 기계공학과를 졸업하고, 같은 대학원에서 공학석사, 미국 미네소타대학교에서 공학박사 학위를 받았다. 현재는 국민대학교 기계공학부 교수로 재직 중이다. 마르키스후즈후, 국제인명센터, 미국인명정보기관, 세계 3대 인명사전에 모두 등재되어 있으며, 미국 기술사(PE)와 대한상사중재원의 중재인으로 등록되어 있다. 또한 미국냉동공조학회 펠로우, 대한설비공학회 석학회원, 한국공기청정협회 편집위원장 등을 맡고 있다. 《공대생이 아니어도 쓸데있는 공학 이야기》《공대생도 잘 모르는 재미있는 공학 이야기》를 집필하고, 《너도 엔지니어가 되고 싶니?》 등을 번역했다. 2022년에는 저술 및 강연활동을 통해 공학문화 확산에 기여한 공로를 인정받아 한국공학한림원에서 제17대 해동상을 수여했다.

목차

들어가며 : 세상의 변화를 이해하고 미래를 예측하는 언어, 미적분·005

I. 혁명의 시작, 순간 속도를 계산하라: 가속도·011

세상에 움직이지 않는 것은 없다·015 | 세기의 발견과 가속도의 관계·017 | 물리학자인 뉴턴은 왜 미분을 고안했을까?·020 | 도로의 무법자를 잡는 미분·029 | 뛰는 캥거루 운전자, 그 위를 나는 미분·034 | 통과 지점은 중요하지 않다, 새로운 가속도 측정법·036 | 가속도의 법칙으로 떠나는 우주여행·040 | 스페이스X의 성공 비결, 회전운동과 미분·045

미적분이 만든 미래 | 새로운 배송시대의 도래, 드론을 제어하라·050

II. 자연의 곡선을 구현하기 위한 인간의 언어: 기율기·059

극한과 무한의 역사·063 | 한계가 없는 수를 설명하는 미적분학·068 | 기율기로 이해하는 미분·071 | 도시를 연결하는 곡선 기하학·075 | 세상을 구성하는 나선의 종류들·080 | 자연의 아름다움을 담아내는 곡선 디자인·084

III. 인공지능이 빅데이터를 학습하는 방법: 최적화·093

현실적인 타협점을 구하라·096 | 최적화를 어렵게 만드는 조건, 다변수·102 | 아마존과 인공지능의 연결고리, 최적화·105 | 복잡한 현실을 반영한 모델, 인공신경망·110 | 인공지능을 학습시키는 최적화 방법, 경사하강법·115 | 우리는 언제 만능 AI 비서를 만나게 될까?·123

미적분이 만든 미래 | 인공지능이 발달할 수 있었던 또 다른 요인들·127

IV. 작은 움직임을 모으면 변화의 축이 보인다: 기하학·131

원의 면적을 구하는 고대 수학·134 | 특명, 코로나 확진자 발생률을 파악하라·141 | 적분을 활용한 오늘날의 측정 방법들·147 | 적분이 이끈 의학 발전, CT 촬영·155

미적분이 만든 미래 | 대용량 데이터 압축이 가능해진 비결, 푸리에 변환·162

V. 디즈니 영화가 전 세계를 사로잡는 법: 나비에-스토르크스 유동 방정식·171

유체 변화를 가장 잘 표현한 방정식·175 | 해가 없는 방정식을 활용하라! 전산유체역학 ·179 | 유동 방정식을 활용한 수학자, 오스카상을 받다·183

쓸모 있는 미적분 개념 | 자연현상을 설명하는 미분방정식들·188

VI. 우리는 어떤 미래를 향해 나아가고 있는가?: 미적분의 예측하는 힘·197

한계효용, 가장 만족스러운 결과가 나오는 순간·199 | 재난지원금을 어느 계층에 지급해야 효율을 극대화할 수 있을까?· 201 | 미래는 어떻게 움직이는가·203 | 미적분으로 이해하는 경제의 흐름·210 | 내 미래자산은 언제 2배가 될까? 근사법·219 | 단타 vs 장투, 미적분이 알려주는 안전한 투자 전략·224

쓸모 있는 미적분 개념 | 미적분으로 읽는 '인생 곡선'·236

출판사 서평

과거를 적분하면 현재가 보이고, 현재를 미분하면 미래가 보인다

세상에 변하지 않는 것은 없다. 행성의 위치나 속도뿐 아니라 사람도 변하고 세월도 변한다. 미적분은 이러한 세상의 변화를 설명하는 언어다. 미적분의 시각으로 보면 첨단 과학기술의 원리부터 자연현상, 사회 변화까지 선명하게 드러난다. 미분으로 세상의 순간적인 변화와 움직임을 포착하고 적분으로 작은 변화들이 누적되어 나타나는 상태를 이해할 수 있다. 예컨대 코로나 19 확진자 발생률을 미적분으로 파악할 수 있다.

일일 확진자는 합쳐지는 양이고 누적 확진자는 합쳐진 결과량이다. 일일 확진자를 모두 합치면 누적 확진자가 되고 누적 확진자의 변화율은 일일 확진자가 된다. 일일 확진자는 하루하루 변동이 심하지만 누적 확진자는 꾸준히 증가한다. 일일 확진자는 증가 속도를 나타내는 미분값에 해당하며, 누적 확진자는 일일 증가분을 적분한 값에 해당한다. 한국에서는 코로나19 일일 확진자 수가 갑자기 증가해 최댓값을 보이다가 2021년 3월 말에 들어서면 일일 확진자 수는 여전히 높은 편이지만 변화 기울기는 완만해진다. 물론 누적 확진자 수가 꾸준히 증가하는 것은 변함이 없다. _VI. 작은 움직임을 모으면 변화의 축이 보인다

적분한 값인 결과량을 통해 현재의 누적 확진자를 파악하고, 미분한 값인 변화량(기울기)를 통해 내일의 확진자 발생률을 예측할 수 있다. 새로운 변수가 등장하지 않는 한, 한 달 후의 확진자 발생률까지 예측할 수 있다. 기후 변화, 주식 시장, 아파트 가격의 추세도 마찬가지다. 다시 말해 과거를 적분하면 현재를 이해할 수 있고, 현재를 미분하면 미래를 예측할 수 있다. 미적분을 이해한다는 것은 변화를 읽는 일이다.

미적분으로 열린 새로운 시대, 미적분으로 예측하는 미래

인간이 미적분을 이해하지 않았더라면, 그 쓸모를 제대로 이용할 줄 몰랐다면 오늘날과 같은 시대는 상상하기 어려

있을 것이다. 이 책은 그러한 미적분을 이용해 미래를 읽고 움직인 사람들의 이야기를 담았다.

스페이스X의 로켓 추진체 재활용 사업은 그동안 많은 실패를 겪고 드디어 성공을 거두기 시작했다. (중략) 무엇보다도 마지막 순간에 로켓 추진체를 안전하게 착륙시키는 기술이 중요한데, 바로 하강속도 제어와 자세 제어 기술이다. 질소 분사 장치가 소량의 질소를 수평으로 분사하여 미세한 회전력을 만들어내면, 일종의 소형 날개인 그리드 핀이 각도를 조정해서 방향을 미세하게 조절한다. 모두 회전운동을 미분적으로 파악해야 가능한 일이다. _I. 혁명의 시작, 순간 속도를 계산하라

인공신경망 모델은 기존의 미분방정식 모델과 달리 과학법칙이나 규칙이 아니라 현실 데이터에 기반한 모델이다. 하지만 인공신경망의 알고리즘은 손실함수를 최소화하는 과정에서 미분의 개념을 사용한다. 앞서 이야기한 뉴턴의 법칙 또는 질량보존의 법칙 등 물리법칙에 기반하여 수식화된 미분방정식을 이용하지만 애플, 인공신경망을 엄청난 양의 데이터로 학습시키는 데 미분의 개념은 필수불가분의 관계다. _III. 인공지능이 빅데이터를 학습하는 방법

해일이 치는 장면이나 물이 튀어오르는 유동과 같이 서로 충돌하거나 물체 표면과 상호작용하는 불규칙한 운동을 정확하게 모사하기 위해서는 오일러 방법보다 흘러지는 입자들을 따라가면서 모사하는 라그랑주 방법이 더 적합하다. 디즈니 영화 <겨울왕국>에서는 이와 관련된 수학 모델을 이용해 생동감 있는 눈의 움직임을 표현했다. 주요하게 사용된 MPM 알고리즘은 입자를 개별적으로 보지 않고 연속체로 해석하는데, 눈이 녹은 정도에 따라 눈이 가지는 물성의 변화를 고려하기에 최적의 모델이다. _V. 디즈니 영화가 전 세계를 사로잡는 법

또한 적분의 원리를 통해 인체에 칼을 대지 않고도 염증 및 암의 위치를 알 수 있게 되었고, 한 줄의 미분방정식을 통해 애니메이션 제작사 픽사는 전 세계를 사로잡았다. 이 밖에도 도로 설계, 데이터 압축 등을 통해 옛본 미적분의 쓸모는 무궁무진하다. 변화의 최전선에는 수학의 꽃 미적분이 있다. 오늘날 미적분의 쓸모는 고속연산이 가능한 컴퓨터를 만나 더욱 확장되고 있다. 훨씬 똑똑해질 인공지능부터 무인자동차, 게임, AI펀드 등 미적분이 우리에게 선사할 미래는 예측 불가능하다. 이렇게 급변하는 사회에서 미적분을 이해하는 것이야말로 새로운 교양이 아닐까.

이제는 미적분 수식을 풀 필요가 없다. 미적분으로 사고하는 것이 중요하다

그동안의 미적분 교양서는 '미적분을 얼마나 쉽게 이해하고 풀 수 있는가'에 초점이 맞춰져 있었다. 《미적분의 쓸모》는 다르다. 이 책은 수학의 쓸모에 눈 뜬 사람들 그리고 여전히 '계산'이라는 말만 들어도 머리가 지끈지끈한 사람들도 쉽게 읽고 이해할 수 있는 미적분 활용법을 담았다. 무엇보다 도통 읽기조차 어려운 수식이 보이더라도 직접 풀 일이 없도록 했다. 반갑게 들릴지는 모르겠지만, 미적분 계산은 너무 복잡해서 컴퓨터에 맡길 수밖에 없는 것이 현실이다.

CT의 적분 원리를 알아보기 위해서 단순화된 신체 단면을 생각해보자. 신체를 4X4의 격자로 나누었을 때 뼈(2)와 장기(1)가 (그림과 같이) 분포되어 있다고 가정하고 광선을 신체의 네 방향으로 투과하면 네 장의 필름을 얻을 수 있다. 필름상에 나타난 영상을 사이노그램이라 한다. 사이노그램은 광선 방향으로 합산된 광량의 적분 결과를 보여준다. 여기서 네 장의 사이노그램에 나타난 적분 결과를 수학적으로 계산해서 신체 내부의 16개 격자값 $f(x,y)$ 를 알아낼 수 있다. 쉽게 얘기해서 16개의 방정식을 풀어 16개의 미지수를 계산하는 과정이라 생각하면 된다. _VI. 작은 움직임을 모으면 변화의 축이 보인다

이외에도 인공지능이 빅데이터를 학습하는 방법인 경사하강법을 설명할 때는 산에서 내려오는 일에 빗댄다거나 미분의 기초 개념을 설명할 때는 과속방직카메라를 이용하는 등 일상 속 사례를 끌어와 최대한 이해하기 쉽게 설명했다. 또한 알아야 할 수식이 있다면 최대한 그래프와 다양한 그림 자료를 통해 직관적으로 이해할 수 있도록 해놓았다. 이 책은 평생 미적분을 다뤄온 공학자가 썼다. 미적분 활용의 최전선에 있는 저자가 금융공학, 의료공학, 항공우주공학, 천체물리학 등의 최신 경향들과 함께 일상 속에서 보통 사람들도 미적분을 어떻게 활용할 수 있는지 보여준다. 2020년 교양과학 베스트셀러였던 《수학의 쓸모》와 마찬가지로 수학적 사고가 얼마나 쓸모 있는지 보여주는 책이다. 그동안 미적분에 막연한 동경과 두려움을 가진 채 제대로 그 쓸모를 만나보지 못했던 사람에게 이 책을 추

천한다. 세상의 변화를 읽는 눈을 가지게 될 것이다.

책속으로

뉴턴의 꿈은 천체의 움직임, 즉 우주라는 공간에서 시간에 따른 천체의 위치 변화로 만유인력을 이해하는 것이었다. 뉴턴에게 남은 숙제는 이 가속도를 이해하고 수학적으로 기술하는 것이었다. 그리고 이 가속도를 수학적으로 정확하게 표현하기 위해서 만든 개념이 바로 미분이다. 미분은 근대에 탄생한 움직임에 관한 수학이다. (중략) 분명한 것은 뉴턴이 자신의 꿈을 이루기 위해 고안한 이 수학 개념이 과학혁명을 이루는 데 일조하고, 300년이 지나 최첨단 기술을 만나 다양한 방면에 쓰이고 있다는 사실이다.

---「Ⅰ. 혁명의 시작, 순간 속도를 계산하라」중에서

직선과 달리 곡선은 부드럽다고 생각한다. 하지만 곡선이라 해서 모두 부드러운 것은 아니다. 곡선이 어색한 부분 없이 완벽하게 부드럽고 자연스러우려면 곡선상에서 1차, 2차 도함수는 물론 그 이상의 고차도함수가 연속적이어야 한다. (중략) 곡선 철로를 놓을 때는 직선 철로와 부드럽게 이어질 수 있도록 하는 것이 중요하다. 연결 철로가 서로 어긋나지 않아야 함은 물론이고, 접선의 기울기가 일치하는 방향으로 이어져야 한다. 즉 함숫값이 연속이고 기울기가 서로 같도록 만들어야 한다.

---「Ⅱ. 자연의 곡선을 구현하기 위한 인간의 언어」중에서

오크통은 가운데가 볼록하여 포도주의 양이 오크통의 깊이에 비례하지 않는다. 과거에는 포도주를 거래할 때 이러한 사실을 알고 있었다. 포도주 상인들은 오크통 안으로 긴 막대를 넣어 포도주가 묻어나는 높이를 측정해서 부피를 구하곤 했다. 이때 부피를 재기 위해 매번 적분하는 수고를 하지 않으려면 막대자의 눈금을 높이에 따라 다르게 매겼다. 위아래 끝쪽보다 중간 부분의 눈금을 촘촘하게 표시한 것이다.

---「Ⅳ. 작은 움직임을 모으면 변화의 축이 보인다」중에서

신체 내부의 각 격자값 $f(x,y)$ 가 주어졌을 때 투과된 광선이 적분되면서 Rf 결과로 나타나는 과정을 라돈 변환이라고 하고, 라돈 변환을 거꾸로 적용하여 도로 격자값 $f(x,y)$ 를 끄집어내는 것을 라돈 역변환이라고 한다. CT란 촬영된 여러 장의 2차원 사이노그램을 라돈 역변환하여 신체 내부의 3차원 공간 정보로 재구성하는 알고리즘이라 할 수 있다. 여기에 적분과 관련되어 엄청나게 많은 수학적 계산이 수반된다.

---「Ⅳ. 작은 움직임을 모으면 변화의 축이 보인다」중에서

픽사의 성공 비결에는 장편 애니메이션을 제작할 비용을 투자해준 디즈니도 있었지만 스티브 잡스가 채용한 수학자와 전산 과학자들의 공이 컸다. <토이 스토리>는 100퍼센트 CG로 만든 세계 최초의 극장용 장편 애니메이션이다. 개봉 당시 사람들은 액션이나 인물에서 전혀 이질감을 주지 않는 이 새로운 영상에 열광했다. 모두 픽사의 수학자와 전산 과학자들이 눈송이, 해일 같은 '움직이는' 자연현상을 자연스럽게 구현해내기 위해 고안한 3D 애니메이션 기법과 해상도 조절 기법 덕분이었다. 그리고 이 모든 제작 과정 뒤에는 하나의 미분방정식이 있다.

---「Ⅴ. 디즈니 영화가 전 세계를 사로잡는 법」중에서

그렇다면 아직 이론해조차 밝혀지지 않은 방정식을 어떻게 활용할 수 있을까? 바로 컴퓨터를 써서 방정식의 근사해를 구하면 된다. 컴퓨터가 발달하면서 더 이상 수학식에 의존하지 않고 수치를 써서 유체의 동적인 움직임을 해석하는 방법들이 개발되었다. 그중 N-S 방정식을 컴퓨터로 수치해석하는 것을 전산유체역학, CFD라 한다. 전산유체역학은 기상 예측이나 항공기 설계 등 다양한 실무 분야에서 널리 활용되고 있다.

---「Ⅴ. 디즈니 영화가 전 세계를 사로잡는 법」중에서

배가 고플 때 피자 한 조각을 먹으면 그렇게 맛있을 수가 없다. 이때 한계효용은 최고치가 된다. 그러나 피자를 한 조각씩 더 먹을 때마다 한계효용은 점점 떨어진다. 하지만 한계효용이 감소하더라도 총 효용은 계속 증가한다. 즉 총 효용은 한계효용을 적분한 것이고 총 효용을 미분한 것이 한계효용이다. 처음에는 총 효용이 급격히 증가하다가 한계효용이 감소하면서 총 효용의 증가율은 둔화된다.

---「Ⅵ. 우리는 어떤 미래를 향해 나아가고 있는가?」중에서

■ 자료1

“과거를 적분하면 현재를 이해할 수 있고, 현재를 미분하면 미래를 예측할 수 있다” 정말 멋진 말이다. 수학에 대한 매력을 한껏 상상하게 하는 표현이다. 수학을 잘 모르거나 못하는 사람에게도 귀를 솔깃하게 한다. 하지만 우리는 이내 절망한다. 수학의 복잡한 기호나 공식, 용어들은 그것에 대한 감각이 선천적으로 열려 있지 않은 사람들에게는 괴로움을 주기 때문이다. 하지만 이 책은 그런 가시밭길에서도 고통을 견디며 앞으로 한 걸음씩 나가게 해주는 매력이 있다.

미분은 근대에 탄생한 움직임에 관한 수학이라고 한다. 17세기 중반까지의 수학은 정적인 대상, 즉 움직이지 않는 물체나 변화하지 않는 상태만을 연구 대상으로 삼을 수 있었다고 한다. 그 이전으로 거슬러 올라가면 변화하지 않은 대상에 대한 수학은 인간의 영역이었지만, 당시 수준으로 수학적인 파악이 어려운 경우는 신의 영역으로 받아들였다는 점이 흥미롭다.

미분은 한 마디로 ‘변화’에 대한 것이다. 변화한다는 것은 앞서 언급했듯이 움직인다는 것이며 여기에는 속도와 가속도에 대한 개념이 덧붙는다. 가속도는 속도의 변화, 속도는 위치의 변화를 의미한다. 다시 말해 “상태의 변화를 이해하는 수학”이 미적분이다. 상태의 변화는 측정 대상의 위치, 양 등 측정할 수 있는 데이터의 차이를 통해 파악할 수 있다. 이를 통해 알 수 있는 변화의 상태는 세 가지다. 증가, 감소, 변화하지 않음. 이 정도만 이해하고 있어도 우선은 미적분에 대한 친근감은 상당히 높아진다. 참고로 움직이는 대상을 측정하는 방법은 아이작 뉴턴이 만들었다.

이 책은 미적분의 중요 개념 중 하나인, 변화를 일으키는 조건인 ‘독립변수’를 설명하면서, 인문사회 분야의 인구수, 통화량 등의 정량적 변수와 적극성, 성실도, 행복감 등의 정성적 변수도 같은 개념으로 이해할 수 있다는 식으로 설명하고 있는데, 이런 방식은 수학을 잘 모르는 독자에게도 개념을 이해하는 데 큰 도움을 주고 있어 이 책의 장점 중 하나라고 할 수 있다. 뉴턴은 행성의 속도와 가속도에 관심이 있었기 때문에 독립변수를 시간으로 한정했다. 그 이유는 시간에 따른 변화를 기술해야 했기 때문이다.

현재 우리가 쓰고 있는 미분 개념과 표기법은 라이프니츠가 제안한 것이지만, 시간에 따른 미분의 개념을 제시한 것만으로도 인류의 큰 도약을 이끌었다는 점에서 뉴턴의 업적은 인류 역사의 기념비적인 사건이라 할 수 있다. 미적분에 근거한 과학적 성취는 결정론적 세계관을 갖도록 하는 데 기여했다고 한다. 물론 우리 시대에는 미시 세계에서 결정론에 반하는 현상이 발견되고 있으나, 뉴턴이 제시한 자연의 인과관계는 거시적 관점에서 여전히 유효하다. 예를 들어 우주발사체의 안정적인 이착륙에 이론적 핵심을 차지하고 있는 것이 바로 뉴턴의 이론이다.

미분과 적분의 개념을 적당히 소개하기 위한 사례로 과속운전적발 기술이 거론된 것도 도움이 되었다. 과속운전 적발을 위해 속도를 측정하는 기술의 예를 들어 순간속도와 평균속도의 개념을 설명하니 미적분 개념이 우리의 일상에 얼마나 밀접한지 느낄 수 있었다.

고대 그리스 철학의 시대를 지나 아우구스티누스로부터 시작하여 근대 이전까지 종교적으로 해석되던 무한의 개념이 이후 과학적 관점에서 해석되기 시작하는 과정도 흥미롭다. 하지만 파스칼의 경우처럼 유한의 경험을 토대로 무한에 대한 이해를 시도해서도 알 수 없는 영역은 신적인 것으로 남겨두려 한 사례는 여전히 무한의 본질 혹은 본성에 대한 이해가 매우 어려웠다는 사실을 반증한다.

눈에 보이지 않지만 우리 삶의 대부분이 미적분이라는 수학적 언어로 채워져 있다는 사실은 경이로움을 느끼게 한다. 수많은 공식과 개념이 아직도 많이 어렵긴 하지만 이 책을 읽으면서 조금씩 수학적 사고방식과 세계관에 익숙해지다 보면 세상을 보는 눈이 조금은 달라져 있을 것이라 기대해본다.