《 _______________수학(상)_진로 세특 보고서 가이드 》

하이에듀

주제	복소수와 복소평면
가이드	수학(상)에서는 앞으로 고등수학 혹은 대학수학을 배우기 이전의 아주 기본적인 연산 혹은 개념들을 배우게 됩니다. 다항식, 이차방정식, 이차함수, 좌표평면, 직선과 원의 방정식 등의 내용을 다루었을 것입니다. 위와 같은 수학(상)에서 배운 기초적인 내용들을 유민 학생의 희망 진로인 ”생명공학“의 특정 학문 분야에 직접적으로 연관 지어 보고서를 작성하기에는 다소 무리가 있을 것으로 보입니다. 생명공학과 같은 전문 분야에 활용되는 수학은 모두 수학(상)에서 배운 내용들을 기초로 할 뿐, 이 내용들만을 직접적으로 활용하는 것은 아니기 때문이죠. 따라서, 현재의 상황에서는 굳이 특정 희망 전공분야와 수학(상)의 내용을 억지로 연관 짓는 주제탐구를 진행하는 것 보다, 유민 학생이 배웠던 수학(상) 내용들을 유심히 관찰하고, 이에 대해 수학적으로 더 자세히 탐구해보는 수학적 탐구능력을 보여주는 것과, 이러한 탐구 내용을 폭 넓은 ”공학분야“에 어떻게 접목을 시킬 수 있는 지가 더욱 중요할 것으로 보입니다. 추천 드리는 주제는 바로, <복소수와 복소평면>입니다. 배웠던 내용을 복습해보면, 복소수란 허수의 개념으로, 중학수학 과정까지는 실수의 범위 내에서 수를 정의하였지만, 처음으로 실수의 범위를 벗어나는 “허수”라는 것에 대해 배우게 되는 단원이었습니다. 그리고 3단원에서는 “좌표평면”에 x축과 y축을 그린 후 ‘실수“들을 점을 찍어 표현하고, 나아가 직선 혹은 원의 방정식을 표현하는 것까지 배웠습니다. 여기서 추가적으로 드는 의문점이 있을 것입니다. 3단원 도형의 방정식에서 배웠던 내용들은 모두, ”실수“를 ”좌표평면“으로 표현하는 것이었습니다. 그렇다면, ”실수“의 범위 밖에 있는 ”허수“는 좌표평면으로 표현하는 방법은 없을까요? ”허수“를 좌표평면에 표현하는 것을 바로 ”복소평면“이라고 합니다. 대학수학, 전공분야에서 다루는 수학 등에 자주 활용하게 될 내용인 ”복소평면“에 대해 지금까지 배웠던 고등수학 내용들을 기반으로, 탐구해보는 것을 추천드립니다. ---> 탐구 동기로 활용하면 좋을 것 같습니다.

<주제탐구 목차>

1. 서론 - 탐구동기
- 허수가 필요한(도입된) 이유
- 주제 선정 이유 (허수는 좌표평면으로 표현할 수 없을까?)

2. 본론
- 복소평면과 복소수 대응 (복소평면 표현하는 방법)
- 복소평면으로 보는 복소수의 다양한 성질
- 복소수의 연산을 복소평면으로 표현

3. 결론
- 탐구 내용 정리
- 탐구 과정을 통해 배운 점 혹은 느낀 점 (공학분야와 연계)

자료1. 허수 “i”가 필요한 이유

0을 제곱하면 0, 0이 아닌 실수를 제곱하면 0보다 크다. 그렇다면 $x^2 = -1$일 때 x는 존재할까. 이 방정식을 풀기 위해 ‘i’라는 문자로 대표되는 허수가 탄생했다. 허수는 존재하지 않는 수라는 인상을 주는 이름 때문에 수로 받아들이기까지 오랜 시간이 걸렸다.

하지만 실수와 허수를 포함한 복소수는 수 체계를 완벽하게 해줬고, 그 쓰임도 어마어마하다. 한때 존재하지 않는 수라고 오해했던 허수를 들여다본다.

첫 번째 질문 I 허수는 어떻게 받아들여졌는가?

Q (인문학자). 먼저 허수라는 이름에 대해서 이야기해볼게요. 허수(Imaginary number, 상상의 수)라는 이름이 ‘없다’는 것을 연상시켜 불필요한 논란을 일으키고 상당히 많은 비판이 있었어요. 독일 수학자 카를 프리드리히 가우스(1777~1855)는 허수 대신 외수(Lateral number, 옆의 수)라는 이름을 붙이길 제안한 바 있습니다. 수학자로서 허수라는 이름을 어떻게 생각하세요.

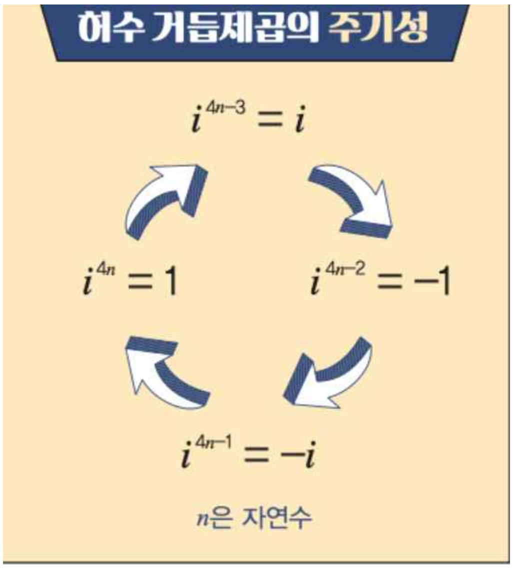
A (수학자). "반가운 질문이네요. 저도 허수라는 이름에 불만이 있거든요. 어떻게 보면 수는 애초에 존재하지 않는다고 말해도 틀린 말이 아니에요. 음수가 있기 전에는 어떤 수에 0이 아닌 수를 더하면 항상 커져야 한다고 생각했을 거예요. 어느 순간 x에 4라는 수를 더했는데 2가 되는 해($x + 4 = 2$)를 구하려고 음수를 도입했지요. 이렇게 인류는 0이나 음수를 어느 순간부터 자연스럽게 받아들였어요. 그렇듯 x를 제곱해서이 나오는 수($x^2 = -1$)인 허수를 찾은 겁니다. 제 생각에는 허수는 제곱해서 음수가 되는 수니까 ‘이차 음수’라는

이름을 붙였으면 사람들이 자연스럽게 이 수를 받아들였을 것 같아요. 이 수를 허수라고 명명하고 허수가 아닌 수를 실수라고 이름 붙이다 보니까 허수를 받아들이기 더 어렵지 않았나 생각합니다."

Q(수학자). 이번엔 제가 질문을 드려 볼게요. 실수와 허수를 포함한 복소수를 보편화한 사람이 가우스라는 이야기가 많은 것 같아요. 교수님도 이 의견에 동의하시나요?

A(인문학자). "허수에 대한 논의는 가우스 이전에도 존재했어요. 지금까지 밝혀진 바에 따르면 이탈리아 수학자 지롤라모 카르다노(1501~1576)가 삼차방정식을 푸는 과정에서 처음 제곱근 안에 음수가 있는 수를 사용한 적이 있습니다. 하지만 가우스가 1799년 박사 논문에서 모든 복소수 계수를 가진 방정식의 해는 언제나 복소수라는 '대수학의 기본 정리'를 증명해냄에 따라 허수에 관한 본격적인 논의가 이뤄졌지요.

두 번째 질문 I 허수는 꼭 필요한 수인가?



Q(인문학자). 오늘날 현대 과학을 보면 허수가 하는 역할이 상당하잖아요. 연구원님의 생각은 어떤가요?

A(수학자). "고전 역학에서는 실수만으로도 충분히 문제를 풀 수 있어요. 하지만 전자기학과 양자역학 같은 현대 과학에서는 허수가 핵심적인 역할을 해요. 한 예로 모든 신호를 사인, 코사인 함수로 분해해 주기함수의 합으로 표현하는 '푸리에 변환'이 있어요. 푸리에 변환의 기본 공식에 허수 i가 쓰여요. 허수의 성질을 이용해 전자기파를 코사인과 사인 곡선으로 분리할 수 있는 거지요.

물리학에서는 파동 방정식, 슈뢰딩거 방정식 등 다양한 방정식이 쓰이는데요. 이 방정식을 못 풀면 해결할 수 없는 문제가 많아요. 방정식은 결국 세상에 있는 많은 문제를 풀기 위해 나타난 거니까요. 그런데 허수는 방정식의 해로도 나타나기 때문에 지금 우리가 누리고

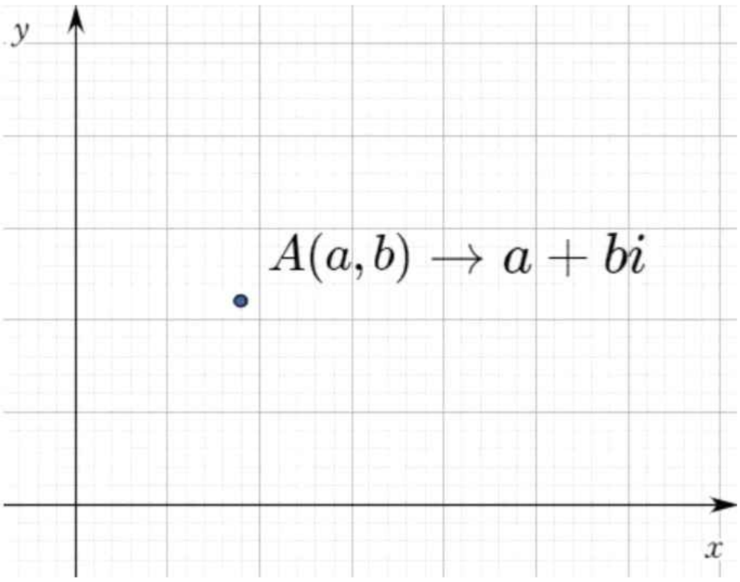
있는 많은 것이 허수 덕분에 가능하지요. 그런 면에서 봤을 때 허수의 존재감은 대단합니다.”

Q(인문학자). 사실 세상에 없는 수인 줄 알았는데 손에 만져지는 것들, 또 우리가 다루는 것들이 사실은 허수를 바탕으로 하고 있다는 게 너무 재밌네요.

참고 자료: “허수 i는 필요한 이유”, 동아사이언스, 김진화 기자, 2023. 03. 04
http://m.dongascience.com/news.php?idx=58793

자료2. 복소수와 복소평면

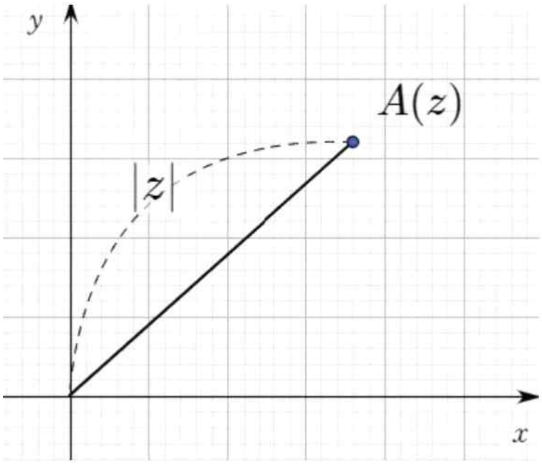
복소평면
실수를 수직선 위에 나타낼 수 있는 것과 마찬가지로 복소수는 좌표평면 위의 점과 대응시켜 나타낼 수 있다.



복소평면과 복소수 대응

복소수 $z=a+bi\,(a,b$는 실수$)$ 라 하면, 이 복소수를 좌표평면 위의 점 $A(a,b)$에 대응시킬 수 있다. 이 점은 무조건 하나만 대응된다. 또한 역으로 생각하면, 좌표평면 위의 점 $A(a,b)$에 대응되는 복소수는 $a+bi$로 유일하게 정해진다. 즉, 좌표평면 위의 점과 복소수 전체 집합과는 일대일 대응을 이루게 된다.
즉, $a+bi \to A(a,b)$ 이다.
복소수 $z=a+bi$에 대응하는 점 $A(a,b)$에서 x성분 a.를 실수부분, y성분을 허수부분이라고 한다. 기호로 $Re(z)=a, Im(z)=b$ 라고 나타낸다.
복소수 $z=a+bi$에서 $b=0$면, z는 실수이고, $a=0, b\neq 0$면, z는 순허수이다.
z가 실수일 필요충분조건은 $z=\bar{z}$, 순허수일 필요충분조건은 $z=-\bar{z}(z\neq 0)$ 이다.

복소수의 절댓값 성질



복소수의 절댓값

복소수 $z = a + bi$에서 $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다. 다시말해 $|z|$는 원점과 점 $A(a, b)$사이의 거리이다.

이를 이용하여 복소수 절댓값의 성질을 찾아보자.

$\bar{z} = a - bi$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$이므로
$|\bar{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$가 성립한다. 또한,

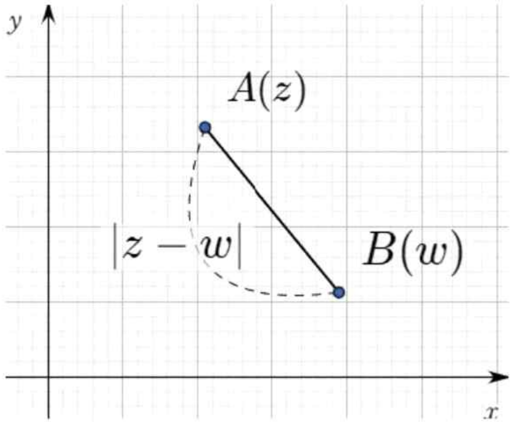
$z = a + bi$, $w = c + di$라 하면,
$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$이고,
$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$
$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$ 이다.

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \frac{z}{w}\left(\overline{\frac{z}{w}}\right) = \frac{z}{w}\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{z}}{w\bar{w}} = \frac{|z|^2}{|w|^2} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)^2 \text{ 이다.}$$

위의 내용을 정리하면,

1. $|\bar{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$
2. $|zw| = |z||w|$
3. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ (단, $w \neq 0$ 이다.)

복소평면에서 두 점 사이의 거리



두 점 사이의 거리

복소평면 위의 두 점 $z = a + bi, w = c + di$ 가 0이 아닌 복소수일때,

$|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ 은 두 점 $A(z), B(w)$사이의 거리이다. 즉, $\overline{PQ} = |z - w|$ 이고,
$|z-w|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{w} + \bar{z}w)$
$= |z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\bar{w})$이다.

즉, 두 복소수 z, w사이의 거리는 $|z-w| = \sqrt{|z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\bar{w})}$ 이다.

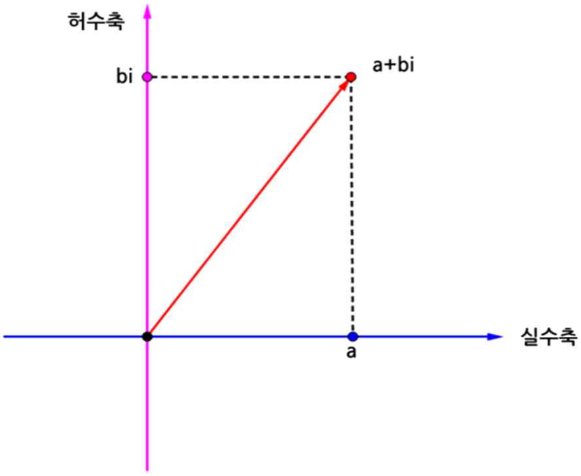
출처: 복소수, 복소평면 알아보기
https://mathtravel.tistory.com/entry/%EB%B3%B5%EC%86%8C%EC%88%98-%EB%B3%B5%EC%86%8C%ED%8F%89%EB%A9%B4-%EC%95%8C%EC%95%84%EB%B3%B4%EA%B8%B0

자료3. 복소수의 연산을 복소평면으로 표현

복소수를 복소평면으로
사람들은 수를 시각적으로 표현을 해야 쉽게 이해가 가능합니다. 그렇지 않은 경우에 그 수에 대해서 인정을 받기도 힘들고 이해도 어려운 경우가 많았습니다. 허수에 대해서도 시각적 표현할 필요가 있었습니다.

허수의 복소평면 표현
독일의 수학자 가우스 (1777~1822)
실수와 허수로 이루어지 수를 복소수라고 하는데 여기서 실수는 수직선 위에 나타낼 수 있었으나 허수를 표시를 할 수 없었는데 가우스에 의해서 평면좌표 위로 표현이 됨

- 실수와 허수의 두 개의 요소로 이루어진 수의 개념을 평면좌표 위에 표현
-가로축 (실수축), 세로축, (허수축) 으로 사용
-가우스 평면 or 복소 평면라고 불림



각각의 복소수의 복소평면위의 점과 일대일 대응관계 가짐
-> 복소수를 시각적으로 표현이 가능하게 됨

복소수의 연산을 복소평면으로 표현

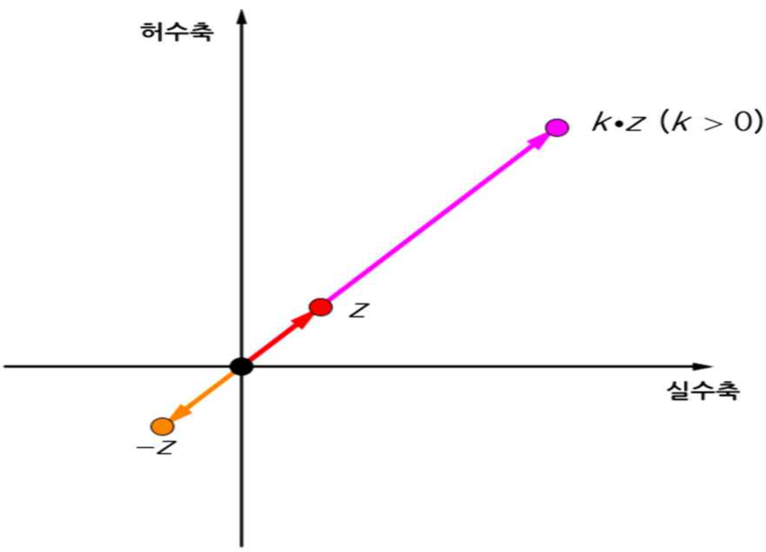
① 복소수의 실수배

복소수 $z=a+bi$ **에서**

$k \bullet z$

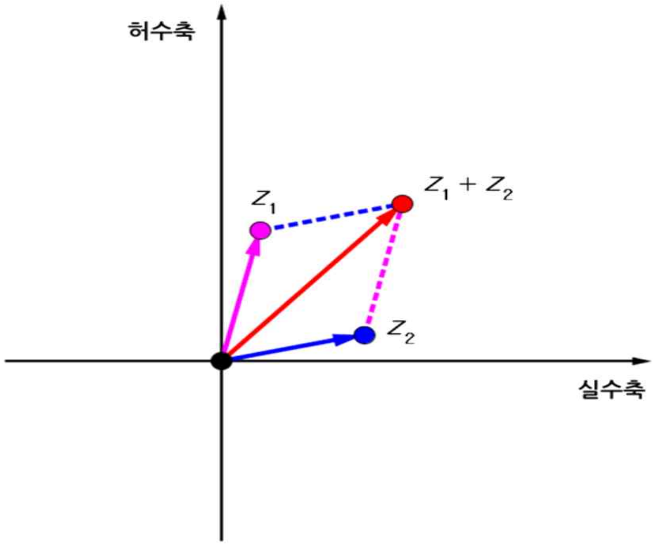
⇨ $k>0$ **원점에서** z**와 같은 방향으로 길이** k**배 되는 위치에 존재함**

⇨ $k<0$ **원점에서** z**와 반대 방향으로 길이** k**배 되는 위치에 존재함**

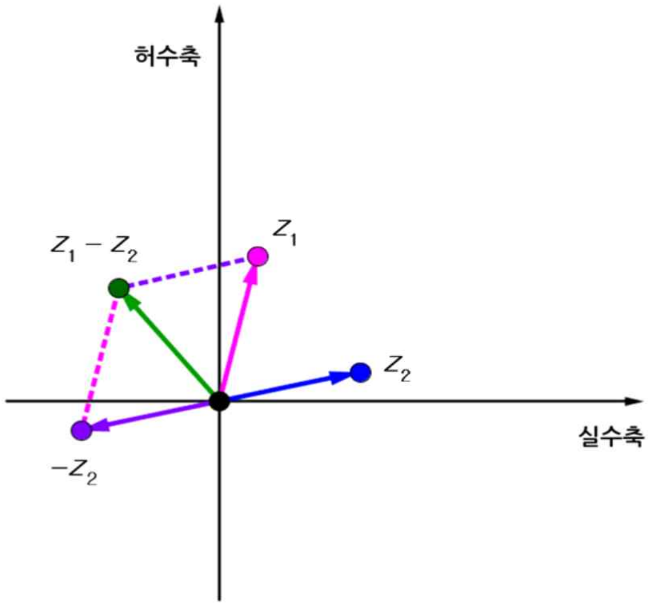


② 복소수의 덧셈과 뺄셈

두 복소수 $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ 라고 두면
$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ 가 되는데 이것을 복소평면에 나타내면 평형사변형의 대각선 부분에 위치하는 것을 알 수 있습니다.



$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$ 가 되고 복소평면에 표시를 해보면 아래와 같이 됩니다.



출처: 복소수와 복소평면
https://j1w2k3.tistory.com/1004

자료4. 참고할만한 추가 자료

복소평면은 교육과정 외의 내용으로, 교과서에서 이 내용을 찾기 어렵기에 위의 자료들로 복소평면에 대한 이해가 다소 어려울 수 있습니다. 따라서, 이를 위해 복소평면에 대해 고등학교 1학년 수준으로 쉽게 설명해놓은 유투브 영상 자료 링크 몇 가지를 올려드리겠습니다.

보고서 및 발표를 준비할 때 이를 참고하여 “복소평면”이 무엇인지 이해해보시기 바랍니다.

1. (고1수학) 복소수_복소평면 개념
https://youtu.be/Ftv2qOfFe3Y

2. 허수, 복소수의 역사와 복소평면
https://youtu.be/seYuDaowSQY